С.К. Соболев

Лекции по линейной алгебре

(краткий конспект)

Лекция 1. *Аксиомы и примеры линейных пространств. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Критерий линейной зависимости, его следствия. Определение базиса и размерности линейного пространства. Теорема о единственности разложения по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в базисе. Матрица перехода к новому базису. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.*

1.0. Лирическое вступление о том, что мы будем проходить в модуле «Линейная алгебра», и как это важно для математики и её приложений.

1.1. Аксиомы линейных пространств.

Линейное пространство L – это множество объектов (любой природы), над которыми определены операция сложения и умножения на вещественное число, результат обеих операций – тоже элемент L:

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in L$$

$$\boldsymbol{a} \in L, \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda \cdot \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} \in L .$$

Элементы линейного пространства для краткости будем называть ***векторами;*** но, чтобы отличать их от векторов – направленных отрезков, изучавшихся в первом семестре, – последние будем именовать ***геометрическими векторами***.

В любом линейном пространстве имеется особый вектор $\boldsymbol{0} \in L$ (***нулевой вектор***), такой, что для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in L$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ выполняются аксиомы:

1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;
2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$;
3) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$;
4) существует вектор $\boldsymbol{x} \in L$ что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
5) $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$;
6) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$;
7) $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;
8) $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

С помощью этих аксиом можно доказать, что *нулевой вектор единственен*, и что *для каждого вектора* $\boldsymbol{a}$ *вектор* $\boldsymbol{x}$ *в аксиоме 4 определен однозначно*, он называется ***противоположным к*** $\boldsymbol{a}$ ***вектором*** и обозначатся $-\boldsymbol{a}$. Таким образом, $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. ***Разностью*** векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \underset{def}{=} \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$. Можно доказать, что

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} .$$

1.2. Примеры линейных пространств.

1) Пространство всех (свободных) геометрических векторов $\boldsymbol{V}$. Пространство $\boldsymbol{V}_\pi$ всех геометрических векторов (параллельных) плоскости π. Пространство $\boldsymbol{V}_\ell$ всех геометрических векторов (параллельных) прямой ℓ.

2) Арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$. Оно состоит из всех упорядоченных наборов из n вещественных чисел. Каждый такой набор называется ***арифметическим вектором***. Числа, из которых составлен арифметический вектор, называются его ***компонентами***. Операции сложения и умножения на число определяются покомпонентно. Нулевой арифметический вектор $\boldsymbol{0} = (0; 0; ...; 0)$.

3) Пространства $\mathcal{P}[t]$ и $\mathcal{P}_n[t]$ всех многочленов от переменной t (всех и степени не выше n соответственно).

4) пространство $\boldsymbol{C}_X$ всех функций, непрерывных на промежутке X, в частности, $\boldsymbol{C}_{\mathbf{R}}$ и $\boldsymbol{C}_{[a;\,b]}$.

5) Пространство $\boldsymbol{M}_{m\times n}$ всех матриц размером $m\times n$.

Линейные операции в примерах 3), 4) и 5) определяются естественным образом.

1.3. Линейно зависимые и линейно независимые векторы.

Определение. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n \in L$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$ (не равные одновременно нулю) такие, что $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$. В противном случае, т.е. если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулю, векторы называются ***линейно независимыми***.

Теорема (общий критерий линейной зависимости векторов произвольного линейного пространства): *векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n \in L$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другие.*

Следствие 1. *Векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n \in L$ *линейно независимы тогда и только тогда когда ни один из них линейно не выражается через другие.*

Следствие 2. *Совокупность векторов заведомо линейно зависима, если она содержит:*
(а) нулевой вектор; (б) два равных или пропорциональных вектора.

Следствие 3. *Если к линейно зависимой совокупности векторов добавить один или несколько векторов, то она останется линейно зависимой.*

Следствие 4. *Если из линейно независимой совокупности векторов исключить один или несколько векторов, то она останется линейно независимой.*

Следствие 5. *Два вектора линейного пространства линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны.*

Критерий линейной зависимости арифметических векторов. *Совокупность из m арифметических векторов пространства* $\mathbf{R}^n$ *линейно зависима (независима) тогда и только тогда, когда у матрицы A, составленной из этих векторов (размером* $m\times n$ *или* $n\times m$*), ранг* $\mathrm{rg}(A) < m$ *(соответственно* $\mathrm{rg}(A) = m$*). В частности, n арифметических векторов пространства* $\mathbf{R}^n$ *линейно зависимы (независимы) тогда и только тогда, когда* $\det(A) = 0$ *(соответственно,* $\det(A) \neq 0$*).*

Фундаментальная лемма. *Если в линейном пространстве L даны n векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$, *через которые линейно выражены какие-то m других векторов* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_m \in L$ *и* $m > n$, *то векторы* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_m$ *линейно зависимы*. (без док-ва).

1.4. Определение базиса и размерности линейного пространства.

Определение. Линейное пространство *L* называется ***конечномерным*** если существует такое натуральное *n*, что любая совокупность, содержащая более *n* его векторов, линейно зависима. В противном случае, т.е. если для любого (сколь угодно большого) $n \in \mathbf{N}$ в линейном пространстве *L* найдется *n* линейно независимых векторов, оно называется ***бесконечномерным***.

Примеры. Пространства $\mathcal{P}[t]$ и C_X бесконечномерны. Остальные линейные пространства в вышеприведенных примерах конечномерны.

Определение. Упорядоченная совокупность векторов $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ конечномерного линейного пространства *L* называется его ***базисом,*** если она линейно независима и любой вектор $\boldsymbol{b} \in L$ можно представить в виде:

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n \qquad (*)$$

Теорема. *В любом конечномерном пространстве есть базис.*

Теорема. *Разложение* (*) *любого вектора по базису единственно.*

Числа $(x_1; x_2; ..., x_n)$ в разложении (*) называются ***координатами*** вектора $\boldsymbol{b}$ в базисе $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$.

Если в линейном пространстве *L* имеется базис, в *L* имеется сколько угодно базисов. Однако:

Теорема. *Все базисы конечномерного линейного пространства содержат одинаковое число векторов* (доказательство с помощью фундаментальной леммы)

Определение. ***Размерностью*** конечномерного линейного пространства L называется количество векторов любого его базиса. Она обозначается $\dim L$.

Следствие 1. *Размерность любого конечномерного пространства равна максимальному числу его линейно независимых векторов.*

Следствие 2. *Любая совокупность из n линейно независимых векторов n-мерного линейного пространства образует базис.*

Примеры. (1) для пространств геометрических векторов: $\dim \boldsymbol{V} = 3$, $\dim \boldsymbol{V}_\pi = 2$, $\dim V_\ell = 1$**.** Стандартный базис в V – ортонормированный базис $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

(2) Для арифметического пространства: $\dim \mathbf{R}^n = n$. Базис состоит из арифметических векторов $\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, ..., n$, где у арифметического вектора $\boldsymbol{e}_k$ на k-м месте стоит 1, а остальные нули. Этот базис пространства $\mathbf{R}^n$ называется ***стандартным.*** Отметим, что координатами арифметического вектора в стандартном базисе являются его компоненты.

(3) Для пространства многочленов $\dim \mathcal{P}_n[t] = n+1$. Стандартный базис: $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$.

(4) для пространства матриц $\dim \boldsymbol{M}_{m\times n} = m \cdot n$. Стандартный базис состоит из матриц, в каждой из которых на одном месте стоит 1, а остальные элементы равны 0.

1.5. Линейные операции над векторами в базисе.

Теорема. *Если дан базис линейного пространства, то при сложении векторов этого пространства и умножении их на число над координатами этих векторов выполняются аналогичные операции.*

1.6. Матрица перехода к новому базису. Пусть в линейном пространстве L даны два базиса: старый $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ и новый $\varphi = \{\boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_n\}$. Разложим каждый вектор нового базиса по старому базису:

$$\boldsymbol{f}_j = p_{1j}\boldsymbol{e}_1 + p_{2j}\boldsymbol{e}_2 + ... + p_{nj}\boldsymbol{e}_n, \ (j = 1, 2, ..., n).$$

Матрицей перехода от базиса ε к базису φ называется квадратная матрица $P = P_{\varepsilon\to\varphi}$, **столбцами** которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода P всегда квадратная и невырожденная: $\det P \neq 0$.

Пример. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^3$ векторы $\boldsymbol{f}_1 = (2; -1; 3)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1; 1; 4)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1; 2; -1)$.

Они линейно независимы, т.к. $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -20 \neq 0$, и поэтому образуют новый базис φ. Матрица перехода от стандартного базиса ε к новому базису φ такая:

$$P_{\varepsilon\to\varphi} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Если α, β, γ – базисы одного и того же линейного пространства, то:*

(а) $P_{\beta\to\alpha} = \left(P_{\alpha\to\beta}\right)^{-1}$; (б) $P_{\alpha\to\gamma} = P_{\alpha\to\beta} \cdot P_{\beta\to\gamma}$.

Замечание. Если в базисе произвольным образом переставить векторы, то получим, вообще говоря, **другой** базис. Матрица перехода будет состоять из нулей и единиц, причем, в каждой строке и в каждом столбце равно по одной единице. Например, в пространстве V из канонического базиса $\varepsilon = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ можно получить базис $\varphi = \{\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}\}$, матрица перехода к которому:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

Теорема. *Пусть в конечномерном линейном пространстве L даны базисы* ε *(старый) и* φ *(новый), и пусть* X_ε *и* X_φ *– столбцы координат одного и того же вектора* $\boldsymbol{a}$ *в этих базисах,* $P = P_{\varepsilon\to\varphi}$ *матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда*

(а) $X_\varepsilon = P \cdot X_\varphi = P_{\varepsilon\to\varphi} \cdot X_\varphi$

(Столбец старых координат равен произведению матрицы перехода на столбец новых координат)

(б) $X_\varphi = P^{-1} \cdot X_\varepsilon = P_{\varphi\to\varepsilon} \cdot X_\varepsilon$

(Столбец новых координат равен произведению обратной матрицы перехода на столбец старых координат).

Замечание. Для нахождения координат вектора в новом базисе, если известны его координаты в старом базисе и матрица перехода P, можно решить систему уравнений с матрицей P, в которой старые координаты являются свободными членами, а новые координаты – неизвестными.

Пример. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a} = (10; 6; 0)$ в базисе $\boldsymbol{f}_1 = (2; -1; 3)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1; 1; 4)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1; 2; -1)$.

Решение. Матрицу перехода мы уже составили ранее:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Искомые координаты $\langle x_1; x_2; x_3 \rangle$ являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Решим её, например, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -20,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -60,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 20,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -100.$$

Отсюда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-60}{-20} = 3,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{20}{-20} = -1,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-100}{-20} = 5.$

Проверка:

$$P \cdot X_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = X_\varepsilon.$$

Ответ: $\boldsymbol{a}\langle 3; -1; 5 \rangle$.